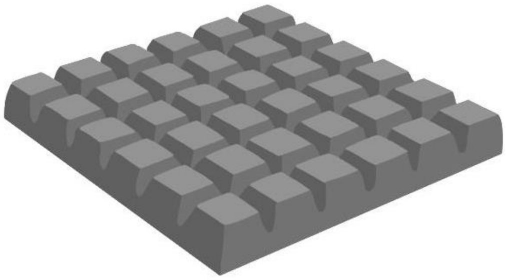
МГУ, ЦПМ, МЦНМО

Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
27 января 2024 г.

10 – 11 классы

Задача 1 (2 балла). Была у братьев шоколадка, разделенная на 36 квадратиков прямолинейными бороздками (см. рисунок). Старший брат сломал шоколадку по случайной прямой и поступил по-братски: съел тот кусок, который оказался не больше другого. Потом пришёл младший брат, сломал оставшуюся часть тоже по случайной прямой и съел кусок, который оказался не меньше другого. Определите, кто из братьев съел в среднем больше – сравните математические ожидания количества квадратиков, доставшихся братьям.



Задача 2. Группа, в которой 27 студентов, сдает письменный зачёт по решению олимпиадных задач. Преподаватель заготовил зачётную работу в 3 вариантах и распределяет варианты случайным образом с единственным условием: количество тех, кто получил разные варианты, должно отличаться не больше чем на единицу. Перед зачётом между студентами Сергеем и Алексеем состоялся следующий диалог.

С: Вероятность того, что у нас с тобой окажется один и тот же вариант, равна 1/3.

А: Если сегодня кто-то один не придёт на зачёт, то она окажется меньше, чем была бы, если бы пришли все.

С: Если сегодня не придут двое, то она окажется меньше, чем была бы, если бы не пришёл кто-то один.

а) (1 балл) Верно ли первое утверждение Сергея?

б) (1 балл) Верно ли утверждение Алексея?

в) (1 балл) Верно ли второе утверждение Сергея?

© ЦПМ, Лаборатория вероятности и статистики МЦНМО, 2024

Задача 3 (2 балла). Есть два одинаковых карандашных грифеля длиной по 10 см. Каждый грифель ломается в одном случайном месте. Какова вероятность того, что найдутся два обломка, сумма длин которых не меньше 18 см?

Задача 4 (3 балла). Имеются два несимметричных игральных кубика. Известно, что:

- вероятность выпадения 1 очка на первом кубике равна 0,14;
- вероятность выпадения 1 очка на втором кубике равна 0,35;
- при всех n от 2 до 6 отношение вероятности выпадения n очков к вероятности выпадения $n-1$ очков на первом кубике в точности в $\frac{n}{n-1}$ раз больше, чем это же отношение для второго кубика.

Найдите математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании второго кубика.

Задача 5 (3 балла). Беспроигрышная лотерея устроена по следующим правилам. Игрок покупает лотерейный билет за n рублей, причём цену он назначает сам (n – целое, большее 1). Затем генератор случайных чисел выбирает случайное натуральное число из отрезка от 1 до n включительно. Выигрыш игрока равен сумме делителей выбранного числа в рублях. Может ли игрок назначить цену лотерейного билета так, чтобы математическое ожидание выигрыша было больше его затрат?

Задача 6 (3 балла). В круг встали 10 матросов, у каждого в руке поднятый флажок. Каждую секунду один случайный матрос, независимо от предыдущих событий, опускает свой флажок (если он был поднят) или поднимает (если флажок был опущен). Докажите, что событие «*через некоторое время все флажки снова будут подняты*» имеет вероятность 1.

© ЦПМ, Лаборатория вероятности и статистики МЦНМО, 2024